

9.1.10 Úlohy s faktoriály a kombinačními čísly

Předpoklady: 9103, 9105, 9107, 9108

Př. 1: Spočítej s pomocí kalkulačky bez použití funkce na výpočet kombinačního čísla

$$\binom{1500}{3}.$$

$$\binom{1500}{3} = \frac{1500!}{1497! \cdot 3!} - \text{tento tvar nemůžeme použít, protože kalkulačka nespočítá } 1500! \Rightarrow$$

zkrátíme ve výrazu vše, co půjde. aby kalkulačka počítala s menším číslem.

$$\binom{1500}{3} = \frac{1500!}{1497! \cdot 3!} = \frac{1500 \cdot 1499 \cdot 1498 \cdot 1497!}{1497! \cdot 3!} = \frac{1500 \cdot 1499 \cdot 1498}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 561375500.$$

Př. 2: Porovnej čísla: $100! + 101!$ a $99! + 102!$.

Žádný z faktoriálů nejde spočítat pomocí kalkulačky (math error = příliš velká čísla) $\Rightarrow$ musíme čísla upravit tak, abychom neporovnávali celé hodnoty faktoriálů.

Nejmenší faktoriál $99!$ $\Rightarrow$ vyjádříme všechny faktoriály pomocí $99!$:

- $100! + 101! = 99! \cdot 100 + 99! \cdot 100 \cdot 101 = 99! \cdot (100 + 100 \cdot 101),$
- $99! + 102! = 99! + 99! \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102 = 99! \cdot (1 + 100 \cdot 101 \cdot 102).$

Nyní stačí porovnat čísla v závorkách, větší číslo v závorce znamená větší hodnotu celého výrazu:

- $100 + 100 \cdot 101 = 10200,$
- $1 + 100 \cdot 101 \cdot 102 = 1030201,$

$\Rightarrow$ číslo $99! + 102!$ je větší než číslo $100! + 101!$.

Pedagogická poznámka: Užitečné příklady. Vyvrací standardní studentskou představu, že s kalkulačkou automaticky spočítají všechno.

Př. 3: Kolika nulami končí zápis čísla $80!$?

$$80! = 80 \cdot 79 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Jak vznikají ve výsledném čísle nuly na konci?

- V součinu se vyskytuje násobek 10 $\Rightarrow$ v součinu pro číslo $80!$ je takových čísel 8 (10 až 80) $\Rightarrow$ 8 nul.
- V součinu se vyskytne 5 a 2 (těch je v součinu určitě víc než 5) $\Rightarrow$ hledáme čísla dělitelná 5 a nedělitelná 10 (ty už jsme započítali) $\Rightarrow$ 8 takových čísel (5, 15, 25, ... 75) $\Rightarrow$ dalších 8 nul.
- Číslo je násobkem druhé mocniny 5 $\Rightarrow$ obsahuje dvě 5, ale započítaná je zatím pouze 1 (kvůli tomu, že jde o násobek 5), taková čísla jsou 3 (25, 50, 75) $\Rightarrow$ další 3 nuly.

Celkový počet nul: $8 + 8 + 3 = 19$.

Zápis čísla $80!$ končí na 19 nul.

Správnost předchozího výsledku si můžeme ověřit pomocí počítače, výpočtem faktoriálu.

$80! = 7156945704626380229481153372318653216558465734236575257710944505822$
 $703925548014884266894486728081408000000000000000000$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad patří mezi velmi zajímavé. Ještě jsem nepotkal studenta, který by ho vypočítal správně. Studenti, kteří příklad „vyřeší“, spočítají, že číslo bude mít 16 nul ($8+8$, a na druhé mocniny zapomenou). Příklad si zkontrolujeme a pak vyhlásíme honbu na chybu. Tento okamžik pak určitě patří mezi ty, kdy se studenti opravdu snaží.

Př. 4: Vyřeš rovnici $(n+1)! = 42(n-1)!$.

Podmínky: $n+1 \geq 0$, $n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1$.

$$(n+1)! = 42(n-1)!$$

$(n+1)n(n-1)! = 42(n-1)! \quad /:(n-1)! \quad (n-1)! \text{ je určité kladné číslo} \Rightarrow \text{můžeme dělit.}$

$$(n+1)n = 42$$

$$n^2 + n - 42 = 0$$

$$(n+7)(n-6) = 0$$

$n_1 = 6$ - vyhovuje podmínce $\Rightarrow$ je řešením.

$n_2 = -7$ - nevyhovuje podmínce.

$$K = \{6\}$$

Př. 5: Vyřeš nerovnici $9n! + 3(n+1)! \geq (n+2)!$.

Podmínky: $n \geq 0$, $n+1 \geq 0$, $n+2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$.

$$9n! + 3(n+1)! \geq (n+2)!$$

$$9n! + 3(n+1) \cdot n! \geq (n+2)(n+1) \cdot n!$$

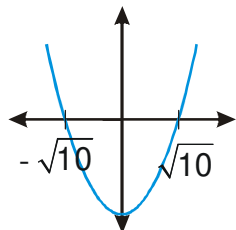
$n![9 + 3(n+1)] \geq (n+2)(n+1) \cdot n! \quad /:n! \quad n! \text{ je určité kladné číslo} \Rightarrow \text{můžeme dělit}$

$$3n + 12 \geq n^2 + 2n + n + 2$$

$$0 \geq n^2 - 10$$

$$0 \geq (n + \sqrt{10})(n - \sqrt{10}) \Rightarrow \text{kvadratická nerovnice v součinném tvaru}$$

Před n je kladné číslo $\Rightarrow$ „d’olík“, průsečíky v bodech $-\sqrt{10}$ a $\sqrt{10}$.



Hledáme části grafu pod osou $\Rightarrow$ řešení v reálných číslech $\langle -\sqrt{10}; \sqrt{10} \rangle$.

Řešíme nerovnici pouze pro nezáporná celá čísla $\Rightarrow K = \{0; 1; 2; 3\}$.

Pedagogická poznámka: Zde se projevuje stará bolest s pamětí - největší problémy mají studenti s vyřešením kvadratické nerovnice v závěru příkladu.

Př. 6: Vyřeš rovnici $\binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x} = 4$.

Neznámá se vyskytuje v kombinačním čísle $\Rightarrow$ musí splňovat podmínky: $x \geq 0$, $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$.

$$\binom{x}{x-2} - \binom{x+1}{x} = 4$$

Nahradíme kombinační čísla faktoriály $\frac{x!}{(x-2)! \cdot [x-(x-2)]!} - \frac{(x+1)!}{(x+1-x)! \cdot x!} = 4$.

$$\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} - \frac{(x+1)!}{1! \cdot x!} = 4$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)! \cdot 2} - \frac{(x+1) \cdot x!}{x!} = 4$$

$$\frac{x(x-1)}{2} - (x+1) = 4$$

$$x^2 - x - 2x - 2 = 8$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

$x_1 = 5$, vyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ je řešením.

$x_2 = -2$, nevyhovuje podmínkám $\Rightarrow$ není řešením.

$$K = \{5\}$$

Př. 7: Vyřeš nerovnici $\binom{9}{x+1} < 2 \binom{9}{x}$.

Neznámá je v kombinačním čísle dole $\Rightarrow$ podmínky zapíšeme po rozepsání na faktoriály.

Přepíšeme kombinační čísla pomocí faktoriálů:

$$\binom{9}{x+1} < 2 \binom{9}{x}$$

$$\frac{9!}{(9-[x+1])! \cdot (x+1)!} < 2 \frac{9!}{(9-x)! \cdot x!}$$

$$\frac{9!}{(8-x)! \cdot (x+1)!} < 2 \frac{9!}{(9-x)! \cdot x!}$$

Faktoriál je definován pouze pro nezáporná celá čísla $\Rightarrow$ podmínky: $8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$, $x \geq 0$, $x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow$ celkově $0 \leq x \leq 8$.

Odstraníme zlomky, všechny faktoriály jsou nezáporná celá čísla $\Rightarrow$ můžeme nerovnici násobit bez obav ztráty kořenů nebo obrácení znaménka.

$$\frac{9!}{(8-x)! \cdot (x+1)!} < 2 \frac{9!}{(9-x)! \cdot x!} \quad / \cdot \frac{(9-x)! \cdot x! \cdot (8-x)! \cdot (x+1)!}{9!}$$

$$(9-x)! \cdot x! < 2(8-x)! \cdot (x+1)! \quad \text{rozepíšeme faktoriály: } (9-x)! = (9-x) \cdot (8-x)!$$

$$(9-x)(8-x)! \cdot x! < 2(8-x)! \cdot (x+1)x!$$

$$(9-x) < 2(x+1)$$

$$9-x < 2x+2$$

$$7 < 3x$$

$$\frac{7}{3} < x \quad \text{řešením mohou být podle podmínek pouze celá čísla v intervalu } \langle 0; 8 \rangle$$

$$\Rightarrow K = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

Př. 8: Petáková:

- strana 141/cvičení 5 d)
- strana 141/cvičení 7 a)
- strana 141/cvičení 9 a)
- strana 142/cvičení 13 b)
- strana 143/cvičení 25 c) e)
- strana 143/cvičení 28 d)
- strana 144/cvičení 30 a)

Shrnutí: Výrazy, které obsahují příliš velké faktoriály pro výpočet pomocí kalkulačky, můžeme spočítat pomocí úprav a zjednodušování.